TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 292, Number 2, December 1985

LES GROUPES ω-STABLES DE RANG FINI

BY

DANIEL LASCAR

ABSTRACT. We prove that a group G which is ω-stable of finite Morley rank is nonmultidimensional. If moreover it is connected and does not have any infinite normal abelian definable subgroup, then it is isomorphic to $\prod H_i/K$, where the H_i are ω_1-categorical groups and K is a finite group.

I. Introduction. 1. Les groupes ω-stables de rang fini sont une énigme pour le théoricien des modèles. On en connaît un certain nombre, á savoir des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos, certains groupes commutatifs (on sait exactement lesquels), et d'autres, construits par produits à partir des précédents. La question est alors: y en a-t-il d'autres?

Ceci n'est qu'un article de plus sur le sujet, faisant suite aux travaux de Macintyre, Baur, Zilber, Cherlin, Poizat, Berline, Thomas pour ne citer que les plus importants. La stratégie habituelle est de définir dans ces groupes des notions qui généralisent les notions classiques de géométrie algébrique, et d'étendre aussi les théorèmes. Les exemples les plus frappants sont peut-être l'existence de la composant connexe **[Ch]**, celle des types génériques **[P1]**, et le théorème d'indécomposabilité de Zilber. Les outils empruntés à la théorie des modèles sont essentiellement des outils combinatoires (par exemple propriétés de chaine pour les sous-groupes définisables), et la relation d'indépendance (forking en anglais) et ses corollaires dont l'existence d'un rang se comportant comme la dimension en géométrie algébrique. On va ici utiliser l'ordre de Rudin-Keisler, qui est l'outil servant à classifier les modèles d'une théorie ω-stable.

Il est impossible dans cette introduction d'entrer dans les détails (voir **[LS2** ou **Sh1]** pour plus de détails). Disons simplement que les modèles d'une théorie ω-stable se laissent quelquefois classifier, quelquefois non. Quand ils se laissent faire, c'est par quelque chose qui ressemble à un arbre de cardinaux. Dans le cas le plus simple, celui des théories bornées (nonmultidimensonal theories en anglais) il suffit, pour décrire complètement un modèle de se donner un nombre dénombrable de cardinaux. Le cas des théories $\aleph_1$-catégoriques correspond par exemple au cas où ce nombre dénombrable est réduit à un. On va montrer ici qu'une théorie de groupe de rang fini est toujours bornée, et de plus qu'un ensemble fini d'invariants suffit pour en classifier les modèles (§III).

Received by the editors June 18, 1984.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 03C45, 03C60.

L'autre idée qui va être exploitée dans les §§IV et V c'est que deux sous-groupes de G qui, intuitivement, correspondent à des invariants différents, commutent. On en déduira par exemple qu'un groupe n'ayant pas de sous-groupe normal abélien infini est, à très peu près, le produit de groupes $\aleph_1$-catégoriques. On verra aussi qu'un groupe a toujours un sous-groupe abélien de sa cardinalité.

Malgré ce qui a été dit, l'ordre de Rudin-Keisler n'apparaît explicitement nul part dans cet article, bien que le lecteur pour qui il est familier le reconnaîtra en maint endroits. En fait, les preuves se font très bien un terme de paires de Vaught. Le lecteur doit-être reconnaissant à Mme Berline dont les conseils m'ont amené à cette présentation et qui a ainsi considérablement allégé les connaissances préalables requises.

2. Les connaissances requises sont les suivantes: en plus des notions de bases de théories des modèles, il faut connaître le "forking" en stabilité, comme on peut le trouver dans [**LP**]. On utilise aussi les formules fortement minimales introduites par Marsh [**M**]. On trouvera les informations nécessaires dans [**LS2**, Chapitre VII]. On utilise aussi la notion d'orthogonalité, mais il n'y a guère que la définition qui soit indispensable: deux types p et q de $S_1(M)$ sont orthogonaux si pour tout $M' \succ M$ et pour tout a et b réalisant respectivement les héritiers de p et q sur M', a et b sont M' indépendants. Ceci est décrit dans le début de [**LS1**].

Pour les groupes, en plus des conditions de chaines et de l'existence de la composante connexe (voir [**Ch** et **P2**]) on n'utilisera que le théorème d'indécomposabilité de Zilber [**Z**]:

On dit qu'un ensemble A dans un groupe G est indécomposable si pour tout sous-groupe définisable H de G, A/H est infini ou réduit à un seul élément. Le théorème de Zilber affirme que si $(A_i;\ i \in I)$ est une famille de sous-ensembles définissables de G qui est ω-stable de rang fini, qui tous sont indécomposables et contiennent l'élément neutre, alors le sous-groupe H' qu'ils engendrent est définissable et indécomposable. De plus, une sous-famille finie de $(A_i;\ i \in I)$ suffit à engendrer H'.

Ce théorème permet de montrer la définissabilité de certains sous-groupes. En particulier le groupe dérivé G' (engendré par l'ensemble des commutateurs $\{aba^{-1}b^{-1};\ a, b \in G\}$) d'un groupe connexe G est définissable.

3. *Conventions et notations*. Comme il est maintenant d'usage on travaillera dans un modèle $\mathcal{U}$ si grand et si saturé que toutes nos constructions s'y feront à l'intérieur. Ainsi modèle veut dire sous-structure élémentaire de $\mathcal{U}$ et sous-ensemble définissable veut dire sous-ensemble définissable avec paramètres dans $\mathcal{U}$. On travaillera dans T^{eq}, c'est à dire que si R est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}^n$, définissable, $\mathcal{U}^n/R$ sera considéré comme un sous-ensemble définissable.

A partir de la troisième section, on considèrera un groupe G interprété dans la structure $\mathcal{U}$. Cela veut dire que G est un sous-ensemble définissable, et que la loi de groupe est aussi définissable. Il est à remarquer que les sous-ensembles définissables de G le sont en utilisant tout langage, qui peut être bien plus riche que $(0, \cdot)$.

On confondra le plus souvent un ensemble définissable avec la formule qui le définit. Ainsi un sous-groupe de G sera une formule $H(v_0)$ dont l'interprétation est un sous-groupe de celle de G. On pourra ainsi parler de sous-groupe abélien, normal, etc. Le lecteur ayant besoin d'éclaircissements peut se reporter aux premières sections de [**BL**].

Si $\varphi(v_0)$ est une formule et M un modèle, on note $\varphi[M] = \{a \in M; M \models \varphi(a)\}$; si $\varphi(v_0, \bar{y})$ est une formule et $\bar{a}$ une suite de paramètres, alors $\varphi[M, \bar{a}] = \{b \in M; \mathcal{U} \models \varphi(b, \bar{a})\}$.

Le rang de Morley est désigné par RM; la cardinalité d'un ensemble X par $|X|$; si G est un groupe et $X \subset G$, alors le centralisateur de X dans G, $\{y \in G; \forall x \in X\ xy = yx\}$ est dénoté par $C_X(G)$.

II. De la pure théorie des modèles. On va introduire ici un ordre sur les ensembles définissables qui remplacera l'ordre de Rudin-Keisler sur les types. Dans les cas simples auxquels on aura à faire par la suite, cela nous suffira pour obtenir une classification des modèles de notre théorie. Notons que Lachlan [**La**] a aussi introduit un ordre de Rudin-Keisler sur les ensembles définissables, mais ce n'est pas le même qui sera étudié ici.

La théorie T est ici supposée ω-stable.

1. DÉFINITION. Soient $\varphi(v_0)$ et $\Psi(v_0)$ deux formules. On dit que φ est inférieure à Ψ, et on note $\varphi < \Psi$ si pour tout modèle M contenant les paramètres de φ et Ψ, $|\varphi[M]| \leqslant |\Psi[M]|$.

On ne s'intéressera ici qu'aux formules infinies (c'est à dire telles que $\varphi[M]$ soit un ensemble infini pour tous modèles M contenant les paramètres de φ). Si $\varphi < \Psi$ et $\Psi < \varphi$, on dira que φ et Ψ sont $\sim$-équivalentes, et on notera $\varphi \sim \Psi$.

2. PROPOSITION. *Soient φ et Ψ deux formules infinies. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\varphi \not< \Psi$ *(la négation de $\varphi < \Psi$).*

(ii) *Il existe M contenant les paramètres de φ et Ψ, et $M' \succ M$ tels que $\Psi[M] = \Psi[M']$ et $\varphi[M'] \neq \varphi[M]$.*

(iii) *Il existe un modèle M_0 dénombrable contenant les paramètres de φ et Ψ tel que pour tout $M_1 \succ M_0$, il existe $M_2 \succ M_1$ avec $\varphi[M_1] \neq \varphi[M_2]$ et $\Psi[M_1] = \Psi[M_2]$.*

(iv) *Il existe un modèle M contenant les paramètres de φ et Ψ et $p \in S_1(M)$ avec $\varphi(x) \in p$ où p est non algébrique et orthogonal à tout type q de $S_1(M)$ contenant $\Psi(x)$.*

PREUVE. Le fait que (i) implique (ii) est facile: il suffit d'appliquer le théorème de Lowenheim-Skolem. Pour (ii) $\to$ (iii) on utilisera le lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans [**LS1**, Proposition 3.5] par exemple.

2.1. LEMME. *Soient $M \prec M'$, $p \in S_1(M)$, p' son héritier à M', a un point réalisant p' et M_1 et M_1' les modèles premiers respectivement sur $M \cup \{a\}$ et $M' \cup \{a\}$. Si $\Psi(v_0)$ est une formule à paramètres dans M, on a $\Psi[M] = \Psi[M_1]$ si et seulement si $\Psi[M'] = \Psi[M_1']$.*

Supposons (ii), et soit $a \in \varphi[M'] - M$. Posons $p = t(a/M)$, et $M_0 \prec M$, dénombrable, contenant les paramètres de φ et de Ψ et tel que p soit l'héritier de sa restriction à M_0. Soit maintenant $M_1 \succ M_0$. On prendra M_2 un modèle premier au dessus de $M_1 \cup \{a\}$ où a est une réalisation de l'héritier de p sur M_1. Il est alors facile de voir, grâce au Lemme 2.1, que les conditions de (iii) sont satisfaites.

Si la condition (iii) est vérifiée, on peut construire, par itération un modèle $M \succ M_0$, où $\Psi[M] = \Psi[M_0]$ et est donc dénombrable, et $|\varphi[M]| = \aleph_1$, ou même a une cardinalité arbitraire fixée à l'avance. Ceci montre que (iii) $\to$ (i).

Voyons pourquoi (iv) $\to$ (ii). Si M et p sont comme dans (iv) et si M' est premier au dessus de $M \cup \{a\}$ où $t(a/M) = p$, alors pour tout $b \in M' - M$, $t(b/M \cup \{a\})$ est isolé. Or $t(b/M)$ n'est pas isolé, ce qui implique que b et a ne sont pas M-indépendants (voir [**LP**, Théorème 5.12] par exemple). Donc $\Psi(x) \notin t(b/M)$, ce qui montre bien que $\Psi[M] = \Psi[M']$.

Pour finir (iii) $\to$ (iv): prenons M contenant les paramètres de φ et Ψ et $M' \succ M$ tel que $\varphi[M] \neq \varphi[M']$ et $\Psi[M] = \Psi[M']$. Soient $a \in \varphi[M'] - M$ et $p = t(a/M)$. Supposons qu'il existe $q \in S_1(M)$, avec $\Psi(x) \in q$ et p et q non orthogonaux. On en a donc une réalisation b non M-indépendante avec a, ce qui veut dire qu'il existe une formule $\chi(v_0, v_1)$ à paramètres dans M telle que $\models \chi(a, b)$, mais pour tout $m \in M$ $\models \neg \chi(a, m)$. Donc

$$\models \exists v_0 [\Psi(v_0) \wedge \chi(a, v_0)].$$

Cette formule est encore vraie dans M', et on trouve donc $b' \in \Psi[M']$ avec $M' \models \chi(a, b')$. Mais on a vu que ceci entraine que $b' \notin M$, ce qui contredit les hypothèses. □

On déduit alors facilement

3. Corollaire. *Soient φ et Ψ des formules infinies à paramètres dans M et K un cardinal. Si $\varphi \not< \Psi$, il existe $M' \succ M$ où $|\Psi[M']| = |\Psi[M]|$ et $|\varphi[M']| > K$. Si $\varphi \not< \Psi$ et $\Psi \not< \varphi$ et si K et K' sont deux cardinaux supérieurs ou égaux à $|M|$, alors il existe un modèle $M' \succ M$ où $|\varphi[M]| = K$ et $\Psi[M] = K'$.*

Dans le cas où $\varphi \not< \Psi$ et $\Psi \not< \varphi$, parce que l'on peut fixer indépendamment les cardinalités de $\varphi[M]$ et de $\Psi[M]$, on dira que φ et Ψ sont indépendantes.

4. Définition. On dit que la formule $\varphi(v_0)$ est $\aleph_1$-catégorique si elle est infinie et minimale pour l'ordre $<$ parmi les formules infinies.

La terminologie est justifiée par le fait que la formule $v_0 = v_0$ est $\aleph_1$-catégorique si et seulement si la théorie T est $\aleph_1$-catégorique. En effet, dire que $v_0 = v_0$ est $\aleph_1$-catégorique veut exactement dire qu'il n'existe pas de paire de Vaught pour T, et il est bien connu que, pour une théorie ω-stable, cette propriété est équivalente à l'aleph-un catégoricité.

5. Proposition. *Les formules fortement minimales sont $\aleph_1$-catégoriques.*

Preuve. Soient $\varphi(v_0)$ une formule fortement minimale $\Psi(v_0)$ une formule infinie telle que $\varphi \not< \Psi$, toutes deux à paramètres dans un modèle M. On va montrer que $\Psi \not< \varphi$.

En effet, il n'y a qu'un seul type $p \in S_1(M)$ non algébrique et contenant $\varphi(x)$. Par 2(iv), ce type est orthogonal à tout type contenant $\Psi(x)$. Soit q un tel type non algébrique. Ce type est à tour orthogonal à tout type de $S_1(M)$ contenant $\varphi(x)$: toujours par 2(iv), $\Psi \not< \varphi$. □

Dans une théorie ω-stable, toute formule contient une formule fortement minimale.

5.1. COROLLAIRE. *Les formules $\aleph_1$-catégoriques sont exactement celles qui sont $\sim$-équivalentes à une formule fortement minimale.*

On laisse au lecteur le soin de montrer la propriété suivante:

5.2. PROPOSITION. *Une formule $\varphi(v_0)$ est $\aleph_1$-catégorique si et seulement si pour tout M contenant les paramètres de φ et p, $q \in S_1(M)$, non algébrique et contenant $\varphi(x)$, p et q ne sont pas orthogonaux.*

6.1. Remarquons encore que les résultats de Combase [**Co**] montrent aisément qu'une formule $\aleph_1$-catégorique à un rang de Morley fini.

6.2. Si φ_1 et φ_2 sont deux formules $\aleph_1$-catégoriques, il n'y a que deux possibilités: ou bien elles sont $\sim$-équivalentes, ou bien elles sont indépendantes. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des formules $\aleph_1$-catégoriques deux à deux non $\sim$-équivalentes, alors elles sont vraiment indépendantes dans leur ensembles, en ce sens que si $K_1, K_2, \dots, K_n$ sont des cardinaux infinis arbitraires, il existe un modèle M, contenant tous les paramètres requis, tel que $|\varphi_i[M]| = K_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

7.1. On va maintenant utiliser cette étude pour classifier, à isomorphisme près, et sous certaines conditions, les modèles de T. Il est à noter que ces conditions sont nécessairement trop restrictives: on peut très bien avoir la situation suivante $M \prec M'$, $M \neq M'$ (et même M non isomorphe à M') alors que pour toute formule $\aleph_1$-catégorique, φ, à paramètres dans M, $\varphi[M] = \varphi[M']$. Ce n'est donc pas en donnant des renseignements sur les ensembles $\varphi[M]$ que l'on arrivera à déterminer le type d'isomorphisme de M. Mais il y a pire: la situation que l'on vient de décrire peut très bien se produire avec des théories T bornées, et même n'ayant qu'un nombre fini (en fait 2 suffisent) de dimensions, pour lesquelles une classification trés convenable existe. Autrement dit, cette approche est vraiment très particulière.

Mais peu importe si elle fonctionne simplement dans le cas des groupes de rang fini.

7.2. L'hypothèse, que l'on montrera être vraie dans le cas des groupes ω-stables de rang fini est la suivante:

($*$) Il existe des formules $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ à paramètres dans le modèle premier M_0, fortement minimales, deux à deux indépendantes, et telles que pour tout $M_0 \prec M \not\prec M'$ il y a un entier i entre 1 et n tel que $\varphi_i[M] \neq \varphi_i[M']$.

Soit A l'ensemble (fini) des paramètres apparaissant dans les φ_i. Si $M \succ M_0$, appelons $\mathrm{Dim}_i(M)$ la cardinalité d'une A-base de $\varphi_i[M]$, c'est à dire d'un sous-ensemble de $\varphi_i[M]$, algébriquement indépendant sur A et maximal pour ces propriétés. Il est classique que $\mathrm{Dim}_i(M)$ est bien définie (deux A-bases ont même cardinalité), et que la donnée des $\mathrm{Dim}_i(M)$ détermine M: si $M' \succ M_0$ et si $\mathrm{Dim}_i(M) = \mathrm{Dim}_i(M')$ pour tout i, alors M et M' sont isomorphes.

Un problème un peu plus délicat est la réciproque: si M et M' sont isomorphes, est-ce que $\mathrm{Dim}_i(M) = \mathrm{Dim}_i(M')$ pour tout i? Contrairement aux théories $\aleph_1$-catégoriques (cas $n = 1$, Théorème de Baldwin-Lachlan), ceci n'est pas toujours vrai; voir les sections sur les théories bornées dans [**Sh1**], Chapitre IX ou [**LS1**], Chapitre X.

III. Les groupes de rang de Morley fini n'ont qu'un nombre fini de dimension. Le but de cette section est de montrer qu'une théorie de groupe de rang de Morley fini satisfait l'hypothèse (*) du section précédente. On verra que le nombre de formules fortement minimales indépendantes est en fait inférieur à α_T.

1. DÉFINITION. On dit que $H(v_0)$ est un sous-groupe normal minimal de G si c'est un sous-groupe normal infini de G ne contenant proprement aucun sous-groupe normal infini de G.

Supposons que H soit un sous-groupe normal infini à paramètres dans un modèle M, et qu'il n'y ait aucun sous-groupe propre de H, définissable dans M et qui soit à la fois infini et normal dans G. Je ne vois pas de raison à priori qui fasse que H soit un sous-groupe normal minimal: il n'est pas interdit, pour un éventuel sous-groupe H' d'utiliser des paramètres dans une extension élémentaire de M. En utilisant le fait que le rang est fini, on va montrer que H est bien normal minimal. Si on suppose que M est $\aleph_0$-saturé, il l'est de toute façon.

Le théorème suivant n'est qu'un remake d'un théorème de Zilber.

2. THÉORÈME. *Supposons que H est un sous-groupe normal minimal de G. Alors H est $\aleph_1$-catégorique.*

PREUVE. Soit $\varphi(v_0) \subset H(v_0)$ une formule fortement minimale, et M n'importe quel modèle contenant à la fois les paramètres de φ et de H (et de G). On va montrer qu'alors $|\varphi[M]| = |H[M]|$, et cela suffira.

On va d'abord constuire une formule $\varphi' \subset \varphi$, infinie (donc $\varphi - \varphi'$ fini et $|\varphi[M]| = |\varphi'[M]|$), avec φ' indécomposable. On remarque que si G_0 est un sous-groupe de G, alors pour que φ/G_0 soit finit il faut et il suffit qu'une des classes modulo G_0 coupe φ suivant un ensemble infini. Choissisons donc un groupe G_0 tel que φ/G_0 est fini, et G_0 minimal pour cette propriété. Un tel groupe existe par ω-stabilité. Soit $a \in G$ tel que $\varphi' = \varphi \cap aG_0$ soit infini. Je dis que φ' est indécomposable: supposons que G_1 est un sous-groupe de G et que φ'/G_1 est fini, alors φ/G_1 est aussi fini ($\varphi - \varphi'$ est fini), et si $a'G_1$ est la classe telle que $\varphi \cap a'G_1$ soit infini, alors $\varphi \cap aG_0 \cap a'G_1$ est aussi infini, et inclus dans une seule classe modulo $G_0 \cap G_1$, ce qui montre que $\varphi/G_0 \cap G_1$ est fini, et par minimalité, $G_0 \subset G_1$.

Donc $|\varphi'/G_1| = 1$.

Soit $a \in \varphi'$. Alors $\varphi'' = a^{-1}\varphi'$ est fortement minimale, incluse dans H, indécomposable et contenant e. Par le théorème d'indécomposabilité [**Z**], le sous-groupe normal de G engendré par φ'' est définissable, donc égal à H par minimalité de celui-ci, et égal au produit d'un nombre fini de conjugué de φ'' ou de φ''^{-1}. Par conséquent $|H[M]| = |\varphi''[M]| = |\varphi[M]|$, comme on le voulait. □

3. Soit M un modèle $\aleph_0$-saturé, et $H_0, H_1, \ldots, H_n$ une suite strictement croissante de sous-groupes, connexes normaux dans G. Pour toit $i = 0, \ldots, n-1$, on voit alors que $\mathrm{RM}(H_i) < \mathrm{RM}(H_{i+1})$ et donc la suite considérée est nécessairement de longeur inférieure ou égale à α_T. On peut donc choisir une telle suite maximale. Dans ces conditions $H_0 = \{e\}$, H_n est la composante connexe de G, et pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, H_{i+1}/H_i est un sous-groupe normal minimal de G/H_i. Pour le théorème précédent toutes les formules H_{i+1}/H_i sont $\aleph_1$-catégoriques (rappelons que l'on

travaille dans T^{eq}). Pour simplifier, appelons Ψ_i la formule H_{i+1}/H_i. Les formules Ψ_i ne sont pas nécessairement indépendantes (voir plus loin), mais on peut toujours en extraire une famille indépendante.

On peut remarquer que la cardinalité de $G[M']$ est exactement égale à la plus grande des cardinalité des $\Psi_i[M']$, pour tout modèle M' contenant M. Ce qui montre que $G(v_0)$ est $\sim$-équivalent à $\bigvee_{i=0}^{n-1} \Psi_i(v_0)$ (Corollaire 3, §II). En particulier, si φ est une formule $\aleph_1$-catégorique incluse dans G, alors il existe un i entre 0 et $n-1$ tel que φ est $\sim$-équivalente à Ψ_i (§II, 6, 2).

On va pouvoir montrer maintenant que l'on peut choisir les groupes H_i, et donc les formules Ψ_i, à paramètres dans le modèle premier. Pour cela on va montrer un lemme qui n'est rien d'autre qu'un avatar du fait bien connu que les théories bornées n'ont pas la propriété du recouvrement fini.

4. Lemme. *Pour toute formule $\varphi(v_0, \bar{y}) \subset G$ il existe un entier n tel que pour toute suite de paramètres $\bar{a}$ de longueur convenable pris dans un modèle M, l'ensemble $\varphi[M, \bar{a}]$ est soit de cardinalité inférieure à n, soit infini.*

Preuve. Supposons le contraire et choisissons un modèle M $\aleph_0$-saturé, dans lequel on a donc pu trouver des groupes H_i et des formules Ψ_i ayant les propriétés décrites au paragraphe 3. Toujours parce que M est $\aleph_0$-saturé, pour chaque n il existe $\bar{a}_n \in M$ tel que $\varphi[M, \bar{a}_n]$ est fini mais de cardinalité supérieure à n. Soit $M' \succ M$ tel que pour chaque i $\Psi_i[M'] \neq \Psi_i[M]$, et faisons une ultrapuissance de M' par un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur ω. On obtient $N' = M'^{\omega}/\mathcal{U}$, $N = M^{\omega}/\mathcal{U} \prec N'$, et $\bar{a}$ la suite de N, correspondant à la suite $(\bar{a}_n, n \in \omega)$. L'ensemble $\varphi[N, \bar{a}]$ est alors infini, et égal à $\varphi[N', \bar{a}]$; en revanche, pour chaque i $\Psi_i[N'] \neq \Psi_i[N]$.

Cette situation est impossible: en effet $\varphi(v_0, \bar{a})$ contient une formule $\varphi'(v_0)$ à paramètres dans N fortement minimale qui, on l'a vu doit être $\sim$-équivalente à l'une des Ψ_i. D'où $\varphi(v_0, \bar{a}) > \Psi_i$: contradiction avec §II, 2(ii). □

5. Soient maintenant M un modèle quelconque et H un sous-groupe normal de G, à paramètres dans M, mais ne possédant aucun sous-groupe propre, définissable à paramètres dans M, qui soit infini et normal dans G. On va montrer que H est normal minimal.

En effet, supposons que $\varphi(v_0, \bar{a})$ avec $\bar{a} \in M' \succ M$ soit une formule définissant un sous-groupe propre de H, infini et normal dans G. Par équivalence élémentaire, pour chaque entier n il existe $\bar{a}_n \in M$ tel que $\varphi(v_0 \bar{a}_n)$ définisse un sous-groupe propre de H, normal dans G et ayant au moins n éléments. Par le Lemme 4, l'un des groupes $\varphi(v_0, \bar{a}_n)$ est en fait infini, contredisant notre hypothèse.

Cela montre que les groupes H_i du paragraphe 3 peuvent être pris à paramètres dans le modèle premier. On peut de plus trouver dans chaque formule Ψ_i une formule φ_i, toujours à paramètres dans le modèle premier qui ne peut pas être scindée en deux sous-ensembles infinis par une formule à paramètres dans le modèle premier. Par un raisonnement analogue à celui que l'on vient de faire, ces formules φ_i sont en fait fortement minimales.

On obtient en conclusion.

6. THÉORÈME. *La condition* $(*)$ *de la section précédente est vérifiée pour les groupes* ω*-stables de rang fini.*

6.1. REMARQUE. Il faut se garder de croire que le nombre de dimensions est exactement égal à l'entier n, autrement dit que les formules Ψ_i sont nécessairement deux à deux indépendantes. Un contre exemple est simplement $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^{\omega}$.

7. Supposons que l'on a à faire à un corps K ω-stable de rang fini. On va montrer que dans ce cas il n'y a qu'une seule dimension, autrement dit que T est $\aleph_1$-catégorique. Ce n'est évidemment pas nouveau si on se place dans le cas où le langage se réduit à $(0, 1, +, \cdot)$.

Soit $\varphi(v)$ une formule fortement minimale que l'on peut supposer, comme dans la preuve du Théorème 2 indécomposable (pour la structure additive) et contenant 0. Il en est de même de $a\varphi = \exists\omega(\varphi(\omega) \wedge v = a\omega)$ pour tout $a \neq 0$. Le sous-groupe additif H engendré par $\bigcup\{a\varphi[K];\ a \in K\}$ est donc définissable et, toujours comme dans le Théorème 2, $\aleph_1$-catégorique. Mais il est clair que H est un idéal de K, donc est égal à K.

IV. Les groupes semi-simples. On a vu que dans un groupe de rang de Morley fini, il y a des sous-groupes $\aleph_1$-catégoriques. La proposition suivante affirme que deux tels sous-groupes s'ils ne sont pas $\sim$-équivalents et s'ils sont connexes, commutent nécessairement.

1. PROPOSITION. *Soit H un sous-groupe connexe de G $\aleph_1$-catégorique. Alors le sous-groupe normal engendré par H est aussi $\aleph_1$-catégorique. D'autre par si H_1 est un autre sous-groupe connexe $\aleph_1$-catégorique et H et H_1 sont indépendants, alors H et H_1 commutent.*

PREUVE. On a déjà vu comment le théorème d'indécomposabilité montrait que H et le sous-groupe normal qu'il engendrait avaient la même cardinalité. Cela montre donc la première partie de la proposition.

Ce même théorème montre que le groupe J engendré par les commutateurs $hh'h^{-1}h'^{-1}$ avec $h \in H$ et $h' \in H_1$ est définissable et connexe. Supposons, pour obtenir une contradiction qu'il ne soit pas réduit à $\{e\}$, donc qu'il soit infini. Ce groupe est en fait engendré par les $H_{h'} = \{hh'h^{-1}h'^{-1};\ h \in H\}$ lorsque les h' varient dans H_1. Il est donc en fait engendré par un un nombre fini d'entre eux, et puisque $|H_{h'}| \leqslant |H|$, $|J| \leqslant |H|$, et comme H est $\aleph_1$-catégorique, J l'est aussi et est $\sim$-équivalent à H. Mais on aurait de même que J est $\sim$-équivalent à H_1, ce qui est contradictoire.

2. On pourrait espérer montrer que nos groupes se décomposent en un produit de sous-groupes $\aleph_1$-catégoriques. Les groupes abéliens font obstacle à cette décomposition. On s'en débarasse en considérant des groupes semi-simples.

2.1. DÉFINITION. Un groupe G est semi-simple s'il n'a aucun sous-groupe normal abélian infini.

2.2. On remarque que si G est définissable à paramètres dans M, pour vérifier qu'il est semi-simple, il suffit de s'assurer qu'il n'y a aucun sous-groupe normal infini abélien à paramètres dans M.

2.3. Si G est un groupe de rang de Morley fini, il possède un sous-groupe normal connexe résoluble de rang maximum disons G_0. Dans ce cas G/G_0 est semi-simple.

3. PROPOSITION. *Soit G un groupe semi-simple connexe. Alors il existe des sous-groupes normaux, connexes $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ($n < \alpha_T$) tels que*

(1) *Chacun des H_i est $\aleph_1$-catégorique.*

(2) *Les H_i sont 2 à 2 indépendants et commutent deux à deux.*

(3) $G = H_1 \cdot H_2 \cdot \cdots \cdot H_n$.

(4) *Pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ si G_i est le sous-groupe engendré par $\bigcup\{H_j; 1 \leqslant j \leqslant n$ et $j \neq i\}$, $G_i \cap H_i$ est fini.*

(5) *G est isomorphe à $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} H_i/K$ où K est un groupe abélien fini.*

PREUVE. Il est d'abord clair que (4) découle de (1) et (2). En effet $|G_i| = \sup\{|H_j|; i \neq j\}$ et puisque H_i est $\aleph_1$-catégorique, si $G_i \cap H_i$ est infini, alors $|G_i \cap H_i| = |H_i|$. Mais ce n'est pas possible car on peut très bien trouver un modèle où les H_j, pour $j \neq i$ sont dénombrables et H_i non dénombrable (§II, 6). Aussi, (5) à partir de ce qui précède n'est qu'un fait élémentaire de théorie des groupes.

Soit $(K_0, K_1, \ldots, K_n)$ une suite strictement croissante de sous-groupes normaux connexes de G, cette suite étant maximale. Là encore, chacun des K_{l+1}/K_l ($l = 0, \ldots, n-1$) est $\aleph_1$-catégorique.

On construit par induction sur l une famille finie $\mathscr{H}_l = \{H_i^l; i \in I_l\}$ de sous-groupes de K_l, définissables connexes et normaux dans G (en fait ce sont des sous-groupes caractéristiques de K_l), possédant les propriétés (1) et (2) et engendrant K_l.

Pour $l = 0$, il suffit de prendre $\mathscr{H}_0 = \{K_0\}$. Pour $l + 1$, il convient de distinguer deux cas, suivant que K_{l+1}/K_l est indépendant avec chacunes des formules H_i^l ou non. Pour chacun des deux cas, on utilisera le lemme suivant.

3.1. LEMME. *Supposons que G soit un groupe connexe, G_1 un sous-groupe normal de G, et G/G_1 $\aleph_1$-catégorique non inférieur à G_1. Alors $G/G_1 < C_G(G_1)$ (le centralisateur de G_1 dans G) et si H est la composante connexe de $C_G(G_1)$, $G = H \cdot G_1$. Si de plus G est semi-simple, $H \sim G/G_1$, et est donc $\aleph_1$-catégorique.*

PREUVE DU LEMME. Posons $G_2 = G_1 \cdot H$; G_2 est un sous-groupe définissable normal de G, et puisque G est connexe, si $G_2 \neq G$, G/G_2 est infini. Comme manifestement $G/G_2 \leqslant G/G_1$, on a $G/G_2 \sim G/G_1$. On peut donc trouver un modèle M où $G_1[M]$ est dénombrable et $|G/G_2(M)| > 2^{\aleph_0}$. Or chaque élément de G agit par conjugasion sur G_1, et les permutations de G_1 induites par les éléments a et b sont égales si et seulement si $a = b$ modulo $C_G(G_1)$. Or il n'y a pas plus de $2^{\aleph_0}$ telles permutations, d'où il découle qu'il y a une infinité d'éléments de G différents modulo G_2 (donc aussi modulo H) mais égaux modulo $C_G(G_1)$, ce qui est parfaitement grotesque puisque H est d'indice fini dans $C_G(G_1)$. Donc $G = G_1 \cdot H$, et puisque $G/G_1 \sim H/H \cap G_1$, $G/G_1 < H$.

Si on suppose maintenant G semi-simple, alors $G_1 \cap H$ est abélien normal, donc fini. Donc H est $\sim$-équivalent à $H/H \cap G_1$, lui même isomorphe à G/G_1. □

Terminons la preuve de la Proposition 3: Dans le cas où K_{l+1}/K_l est indépendant avec chacune des formules H_i^l, c'est à dire où K_{l+1}/K_l n'est pas inférieure a K_l, il suffit d'ajouter à la famille $\mathscr{H}_l$ la composante connexe du centralisateur de K_l dans K_{l+1}.

Dans l'autre cas, disons que K_{l+1}/K_l est $\sim$-équivalent à $H_0 \in \mathscr{H}_l$, et soit G_0 le sous-groupe de K_l engendré par $\bigcup(\mathscr{H}_l - \{H_0\})$. Alors K_{l+1}/G_0 est $\aleph_1$-catégorique, $\sim$-équivalent à K_{l+1}/K_l, et non inférieur à G_0. Soit donc H la composante connexe du centralisateur de G_0 dans K_{l+1} (qui contient H_0). Il suffit donc, pour obtenir la famille $\mathscr{H}_{l+1}$ de remplacer H_0 par H dans la famille $\mathscr{H}_l$. □

3.2. Ce théorème est évidemment à rapprocher du théorème de géométrie algébrique disant qu'un groupe algébrique semi-simple et connexe est engendré par un nombre fini de sous-groupes normaux et simples, commutant entre eux. On peut naturellement se demander si un groupe $\aleph_1$-catégorique semi-simple est, à un groupe fini près, le produit de groupes simples, ou même s'il est nécessairement lui même simple. Je ne connais pas la réponse à ces questions, mais il faut remarquer que la dernière n'a de sens que si on restreint le langage: sinon il suffit de prendre $G \times G$, où G est un groupe simple $\aleph_1$-catégorique, avec deux prédicats unaires pour interpréter $\{e\} \times G$ et $G \times \{e\}$, et un symbole de fonction qui sera un isomorphisme entre ces deux projections.

4. Considérons maintenant un groupe G de rang de Morley fini, connexe. Il n'y a qu'un seul groupe définissable normal connexe R tel que G/R soit semi-simple. Cela montre en fait que R est définissable sans paramètre. On va voir que dans le cas où G est semi-simple, les différents groupes H_i de la Proposition 3 sont aussi pratiquement définissables sans paramètre.

On va montrer exactement que si f est un automorphisme de la structure M (laissant éventuellement fixes les paramètres nécessaires à la définition de G), alors f permutera les H_i [**M**]. De là, le lecteur pourra montrer que les H_i sont définissables avec des paramètres algébriques (dans T^{eq}, avec les paramètres définissant G).

En effet, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, $f[H_i]$ est un sous-groupe normal connexe de G, qui de plus est $\aleph_1$-catégorique. Il existe donc nécessairement un entier j entre 1 et n tel que $f[H_i]$ est $\sim$-équivalent à H_j. Qui plus est, l'application $i \to j$ ainsi définie est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On va voir que $f[H_i]$ est en fait égal à H_j.

Posons $G_0 = \prod\{H_k; 1 \leqslant k \leqslant n, k \neq j\}$; par la Proposition 1, $f[H_i]$ commute avec G_0, et il est facile de voir que H_j lui-même est la composante connexe du centralisateur de G_0 dans G. Donc $f[H_i] \subset H_j$. En considérant f^{-1}, on déduit que $f[H_i] = H_j$.

5. Terminons par une autre contrainte liant les différents groupes définis à partir de G.

5.1. Lemme. *Supposons que G est un groupe connexe de rang de Morley fini, et soit G' le groupe dérivé de G (engendré par les commutateurs $\{aba^{-1}b^{-1}$; $a, b \in G\}$). Alors $G' < G/Z(G)$. ($Z(G)$ le centre de G.)*

Preuve. À peu près évident, car pour n'importe quel groupe G, on a $|G'| \leqslant |G/Z(G)| + \aleph_0$.

Consédérons maintenant un groupe G connexe tel que la suite dont il et question en §III, 3 soit de longeur 3, c'est à dire soit égale à $(\{e\}, G_0, G)$. Alors il y a trois possibilités (non exclusives).

(1) G est $\aleph_1$-catégorique.

(2) G est abélien.

(3) Il existe H, $\aleph_1$-catégorique commutant avec G_0 tel que $G = H \cdot G_0$ et $H \cap G_0$ fini.

En effet supposons que l'on ne soit ni dans le premier, ni dans le second cas. Alors G_0 et G/G_0 sont tous les deux $\aleph_1$-catégoriques et indépendants, et si H_0 est la composante connexe du centralisateur de G_0 dans G, on sait que $G = H_0 \cdot G_0$. Si $H_0 \cap G_0$ est fini, alors $H = H_0$ convient. Sinon c'est que $H_0 \cap G_0 = G_0$; donc que G_0 est central dans G et donc G' le groupe dérivé de G, qui est infini puisque G est non abélien est inférieur à G/G_0 (Lemme 5.1), et lui est donc $\sim$-équivalent. On voit alors que $G' \cap G_0$ doit être fini (sinon G' et G_0 lui seraient tout deux $\sim$-équivalents) et $G' \cdot G_0$ est un sous groupe normal de G contenant strictement G_0, donc doit être égal à G; $H = G'$ convient donc dans ce cas.

V. Grands groupes abéliens. Ici, on va améliorer, dans le cas d'un groupe de rang de Morley fini, le théorème disant que dans un groupe ω-stable, il y a un sous-groupe abélien infini [**Ch**]. On va montrer que l'on peut choisir ce sous-groupe abélien de même cardinalité que le groupe de départ.

1. Proposition. *Un groupe G de rang de Morley fini possède un sous-groupe A, abélien, qui lui est $\sim$-équivalent.*

Preuve. On peut évidemment supposer le groupe G connexe. On raisonne par induction sur le rang de G.

Si G n'a pas de sous-groupe normal infini (c'est le cas par exemple si $\mathrm{RM}(G) = 1$), alors G est $\aleph_1$-catégorique et on sait qu'il contient un sous-groupe abélien infini, qui lui est donc $\sim$-équivalent.

Sinon soit H un tel sous-groupe connexe maximal; par hypothèse d'induction, il existe $A \subset H$, A groupe abélian et $A \sim H$. On sait aussi que G/H est $\aleph_1$-catégorique. Si $G/H \leqslant H$, alors $A \sim G$, et c'est fini; sinon on distingue encore plusieurs cas

(1) Si $C_G(H) \neq G$, alors par hypothèse d'induction il existe un groupe $B \subset C_G(H)$ abélien, avec $B \sim C_G(H)$. Alors AB est abélien, et par le Lemme 3.1, §IV; $AB \sim G$.

(2) Si G est abélien, il n'y a rien à faire.

(3) Dans le cas restant le groupe G' engendré par les commutateurs de G est $\sim$-équivalent à G/H (§IV, 5.1), et possède un sous-groupe B abélien infini. Alors AB est toujours commutatif et $\sim$-équivalent à G. □

2. Proposition. *Si G est un groupe résoluble de rang de Morley fini, il possède un sous-groupe normal abélien A tel que $A(v) \sim G(v)$.*

Preuve. Le raisonnement ressemble à ceux qui précèdent. On suppose encore G connexe, et il faut maintenant montrer par induction sur le rang de G que si G est normal dans H et résoluble, alors il existe $A \subset G$, $A \sim G$, normal dans H et abélien. On utilise toujours les mêmes ingrédients, et on laisse donc la démonstration au lecteur.

VI. Conclusion. On peut être tenté de généraliser les résultats de cet article.

Il n'y a guère de problèmes pour les groupes superstables de rang fini. Il faut, au lieu des paires de Vaught, utiliser l'ordre de domination $\rhd$ (voir [**LS1**]) et les groupes infiniments définissables comme dans [**BL**]. On obtient ainsi que ces groupes n'ont qu'un nombre fini de dimensions et on peut classifier les modèles $\aleph_\varepsilon$-saturés. On peut aussi voir que si G est superstable de rang fini, semi-simple, alors G est isomorphe à $\prod_{i \in I} H_i/K$, ou les H_i sont des sous-groupes définissables de G, unidimentionnels, et K un sous-groupes fini.

Si G est ω-stable et $U(G)$ est fini, alors $U(G) = \mathrm{RM}(G)$. Pour voir ceci, il suffit de construire, d'une façon analogue à ce qui a été fait pour la §III une suite $\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ avec $n \leqslant U(G)$ et chaque G_{i+1}/G_i unidimentionnel. Il suffit de savoir alors qu'une théorie unidimentionnel et ω-stable est $\aleph_1$-catégorique, et que pour celle-ci, le rang U est égale au rang de Morley.

On sait qu'il existe des groupes ω-stables qui ne sont pas bornés (les corps différentiellement clos par exemple). Il n'y a donc pas d'espoir dans ce sens. En fait, les exemples connus ne sont pas classifiables même en admettant pour invariants des choses beaucoup plus compliquées qu'une suite de cardinaux: dans la terminologie de Shelah, on dit qu'ils ont la D.O.P. (voir **[SH2]**). Je conclurai donc par la question suivante: existe-t-il des groupes ω-stables non bornés, mais n'ayant pas la D.O.P.?

BIBLIOGRAPHIE

[BCM] W. Baur, C. Cherlin and A. Macintyre, *Totally categorical groups and rings*, J. Algebra **57** (1979), 407–440.

[Be] C. Berline, *Superstable groups; a partial answer to a conjecture of Cherlin and Zilber*, soumis.

[BL] C. Berline et D. Lascar, *Superstable groups*, soumis.

[Ch] G. Cherlin, *Groups of small Morley rank*, Ann. Math. Logic **17** (1979), 1–28.

[Co] J. Combase, *Soft model theoretic analysis of ω_1-categorical theories*, preprint.

[La] A. H. Lachlan, *Spectra of ω-stable theories*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **24** (1978).

[LS1] D. Lascar, *Ordre de Rudin-Keisler et poids dans les théories stables*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **28** (1982), 413–430.

[LS2] ______, *Théorie de la stabilité* (a paraître).

[LP] D. Lascar and B. Poizat, *An introduction to forking*, J. Symbolic Logic **44** (1979), 330–350.

[M] W. E. Marsh, *On ω_1-categorical non ω-categorical theories*, Ph.D. Thesis, Dartmouth College, 1966.

[P1] B. Poizat, *Sous-groupes définissables d'un groupe stable*, J. Symbolic Logic **46** (1980), 137–146.

[P2] ______, *Groupes stables avec types génériques réguliers*, J. Symbolic Logic **48** (1982), 339–355.

[Sh1] S. Shelah, *Classification theory*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[Sh2] ______, *The spectrum problem*. I, Israel J. Math. **43** (1982), 324–355.

[T] S. Thomas, *Model theory of locally finite groups*, preprint.

[Z] B. Zilber, *Groups and rings with categorical theories*, Fund. Math. **95** (1977), 173–188.

UNIVERSITÉ PARIS VII, U.E.R. MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE, 2, PLACE JUSSIEU, 75251 PARIS CEDEX 05, FRANCE